CENTRO UNIVERSITÁRIO NOSSA SENHORA DO PATROCÍNIO

FACULDADE DE FILOSOFIA CIÊNCIAS E LETRAS

MATEMÁTICA

TRIGONOMETRIA

Harley José Soncim –1sem Matemática

ITU

2000

ÍNDICE:

TRIGONOMETRIA

CONCEITOS BÁSICOS

Ao despir a Matemática das suas longas tradições para a vestir com conjuntos e estruturas, muitos assuntos perderam todo o encanto e atração.. Talvez não tenhamos despejado o bebê juntamente com a água da banheira ao retirar às matemáticas o conjunto dos assuntos e dos capítulos mais antigos e menos coerentes, mas perdemos com certeza o sabão: sabemos como é fácil encontrar estudantes que pensam que as matemáticas cheiram mal.

C.V. Jones

Esta aula foi elaborada com o objetivo de estar revendo com os alunos os conceitos básicos necessários ao início do estudo da trigonometria. É indicada para ser utilizada após estes conceitos serem trabalhados em sala de aula, como reforço ao estudo do conteúdo.

A tônica desta aula é ajudar o aluno a construir, desenvolver e aplicar idéias e conceitos da trigonometria, sempre compreendendo e atribuindo significados ao que está fazendo, buscando relacionar a aplicação dos conceitos à sua vida cotidiana.

Foi produzida de forma a conter recursos visuais que levassem os alunos a ter uma oportunidade de estar visualizando de forma agradável o conteúdo estudado.

Planejamento Básico

Série Indicada: 1º ano do Ensino Médio

Assunto: Conceitos Básicos de Trigonometria

Objetivos de Ensino:

- Estimular o aluno para que pense, raciocine, relacione idéias e tenha autonomia de pensamento.
- Conhecer um pouco da história da matemática e sua relação com o conteúdo estudado.
- Estudar com os alunos a circunferência trigonométrica e seus arcos e ângulos em graus e radianos.

Objetivos de Aprendizagem:

- Entender, definir e graduar a circunferência trigonométrica.
- Localizar e identificar arcos e ângulos na circunferência trigonométrica em graus e radianos.

Conteúdo da aula:

- Aspectos históricos da trigonometria
- Definições e conceitos
- Exercícios relacionados ao conteúdo
- Leitura informativa

Sugestões de atividades em sala de aula:

- Uso de jogos desafios, com os alunos divididos em equipes e questões divididas em diferentes níveis de dificuldades, buscando uma melhor compreensão do assunto e estimulando o crescimento dos mesmos.

Informações complementares:

- A aula é auto-explicativa, não havendo necessidade de o professor dar orientações preliminares, sendo melhor que os próprios alunos busquem fazer relações entre o conteúdo e o que encontrará na aula.
- Os alunos deverão levar para o laboratório de informática: lápis, papel, calculadora para os cálculos que se fizerem necessários para a resolução dos exercícios.
- Os exercícios do final da aula são meramente para fixação do conteúdo, são questões objetivas que visam diretamente a aplicação dos conceitos. Ao acerto da opção, automaticamente passa-se para a questão seguinte.
- A intenção desta aula planejada encontra-se em anexo ,foi inicialmente elaborada em Power Pointe

fim

Dois tipos de trigonometria:

Trigonometria Plana e Trigonometria Esférica

A Trigonometria Plana trata da resolução de triângulos do plano e a Trigonometria Esférica da resolução de triângulos na esfera.
Durante a maior parte da existência da Trigonometria, seu desenvolvimento foi comandado pelo da Trigonometria Esférica, pois essa era a usada na Astronomia Matemática, por muitos séculos, sua maior aplicação. Foi só com o desenvolvimento da Mecânica e da Física que a Trigonometria Plana passou ao primeiro plano.

Hoje a vasta maioria das pessoas sequer sabe o que é Trigonometria Esférica e muitos outros acham que ela é disciplina completamente ultrapassada, coisa dos livros de História da Matemática. Nada mais falso, pois ela continua sendo disciplina básica para a Astronomia Matemática, bem como para um grande elenco de disciplinas mais recentes, como a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, a Mecânica de Satélites Artificiais, a Transmissão de Radio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetórias de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, etc.
Dados esses fatos e dado que a Trigonometria Plana é assunto obrigatório do ensino de segundo grau.

UM POUCO DE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Trigonometria é o ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e ângulos de triângulos (polígonos com três lados). A trigonometria plana lida com figuras geométricas pertencentes a um único plano, e a trigonometria esférica trata dos triângulos que são uma seção da superfície de uma esfera.

A trigonometria começou como uma Matemática eminentemente prática, para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia. Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a trigonometria esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada.

A trigonometria começou com as civilizações babilôlica e egípcia e desenvolveu-se na Antiguidade graças aos gregos e

indianos. A partir do século VIII d.C., astronômos islâmicos aperfeiçoaram as descobertas gregas e indianas, notadamente em relação às funções trigonométricas.

A trigonometria moderna começou com o trabalho de matemáticos no Ocidente a partir do século XV. A invenção dos logaritmos pelo escocês John Napier e do cálculo diferencial e integral por Isaac Newton auxiliaram os cálculos trigonométricos.

1.- A idéia genial de Hipparchos

Os problemas de triângulos mais comuns e importantes são aqueles em que, a partir de alguns lados e ângulos conhecidos, queremos achar os demais lados e ângulos. Esses problemas trazem o inconveniente de que as relações entre esses elementos usualmente não são algébricas. Por exemplo, no caso de um triângulo qualquer a relação entre os lados do mesmo não é algébrica, a não ser no caso especial de triângulos retângulos
(para os quais vale o teorema de Pythagoras).
Contudo, introduzindo a função trigonométrica co-seno, podemos facilmente achar relações algébricas entre os lados e os cos dos ângulos do triângulo, conforme nos diz o teorema dos co-senos, em notação clássica :

$$a2 = b2 + c2 - 2\ b\ c \cos A$$

$$b2 = a2 + c2 - 2\ a\ c \cos B$$

$$c2 = a2 + b2 - 2\ a\ b \cos C$$

Com tais relações, por exemplo, conhecendo b, c e A, o valor de a será facilmente obtido a partir de uma extração de raiz quadrada precedida da determinação do cos A.
Essa, em essência, foi a idéia de Hipparchos e é tão simples que poucos se dão conta de sua genialidade. Com a introdução de funções

trigonométricas, ele não só viabilizou achar relações entre lados e ângulos de triângulos, mas tornou algébricas essas relações. Esse artifício de cálculo tem um preço: é preciso construir tabelas das funções trigonométricas.

2.- A função trigonométrica de Hipparchos: a corda

Hipparchos introduziu, em verdade, uma única função trigonométrica: a função corda, conforme mostrado na figura abaixo. Dado um círculo de raio R, a função corda associa a cada ângulo A de vértice no centro do círculo o valor da medida da respectiva corda geométrica:

É é fácil ver que essa função é muito parecida com a nossa função seno. Com efeito, é imediato vermos que:

$$\text{corda}(A) = 2R\,\text{sen}(A/2)$$

Outras peculiaridades:

o valor da corda depende do raio do círculo usado esse círculo era o círculo que circunscrevia o triângulo a resolver

EXEMPLOS:

Hipparchos usava como unidade de medida, para expressar os valores da função corda, o minuto, que era 3 438 avos do raio. Contudo, seus sucessores, usavam uma unidade mais prática, a parte, que valia 60 avos do raio. Assim sendo, temos:

corda de 60°= R = 60 partes

corda de 90°= R 2 = 84.8528 partes

EXEMPLO:

Tomando círculo de R = 8 metros, mostre que:

corda 60° = 8 m

corda 90° = 11.3137 m

3.- Como Hipparchos construiu uma tabela de valores da função Corda ?

A TABELA ORIGINAL DE HIPPARCHOS 150 AC

Sua tabela dava cordas de 7.5° em 7.5°, desde zero graus até 180 graus. Para conseguir isso, ele baseou-se em resultados equivalentes à nossa fórmula do seno do meio ângulo e a fórmula do seno da soma de dois ângulos:

$$crd^2 (A/2) = 1/2 \ crd (180°) \ [crd (180°) - crd (180° - A)]$$

$$crd (180° - (A+B)) \ crd (180°) = crd (180° - A) \ crd (180° - B) - crd (A) \ crd (B)$$

com isso ele:

calculou sucessivamente crd 60°, crd 30°, crd 15°, crd 7.5°

calculou a tabela propriamente dita, que dava a corda para os ângulos de 7.5 ° até 180 °, com passo de 7.5°.

A TABELA MAIS EXATA DE PTOLEMAIOS C. 150 d.C

É uma tabela mais útil, pois dá a corda de meio em meio grau, desde zero até 180 graus. Sua estratégia de cálculo é, também, um aperfeiçoamento da de Hipparchos:

usando o hexágono e o pentágono, obteve a crd de 60 e 72 graus

Usando a expressão da corda da diferença, obteve a corda de 72° - 60° = 12°

trabalhando como Hipparchos, obteve sucessivamente: crd 6°, crd 3°, crd 1.5° e crd 0.75°

obtém a crd 1° usando que se 0 < A < B < 180° entã o crd B : crd A : : B : A pelo meio-arco, calcula a crd 0.5° desde a crd 1°

finalmente obtém, pela regra da crd da soma, as cordas de zero até 180 graus, de meio em meio grau

Aplicações clássicas da Trigonometria

1.- As primeiras aplicações da Trigonometria

A Trigonometria nasceu c. 300 AC entre os gregos, para resolver problemas de Astronomia Pura .

Suas primeiras aplicações práticas ocorrem só com Ptolemaios 150 dC o qual, além de continuar aplicando-a nos estudos astronômicos, a usou para determinar a latitude e longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seus mapas.

Do mundo grego, a Trigonometria passou, c. 400 dC, para a India onde era usada nos cálculos astrológicos (ainda eram problemas de Astronomia). Por cerca de 800 dC ela chega ao mundo islâmico, onde foi muito desenvolvida e aplicada na Astronomia e Cartografia. Por cerca de 1 100 dC a Trigonometria chegou, junto com os livros de Ptolemaios, na Europa Cristâ. Aí, inicialmente estudada tão somente por suas aplicações na Astronomia, com os portugueses da Escola de Sagres encontra uma aplicação de enorme valor econômico na navegação oceânica.

As aplicações da Trigonometria até c. 1 600 d.C :

Astronomia
Cartografia
Navegação Oceânica

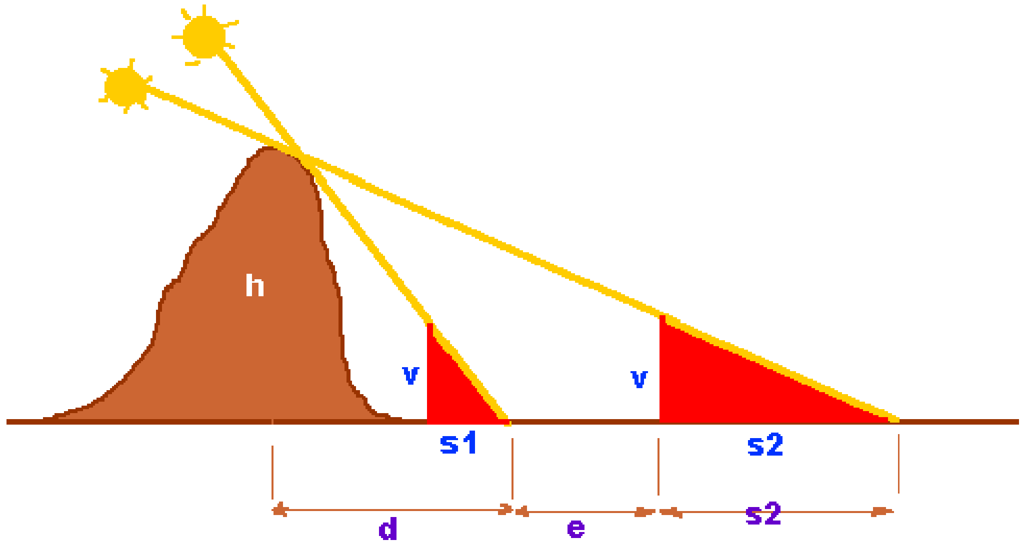
Todas essas aplicações tratavam de problemas de Trigonometria Esférica e nada tinham a ver com problemas de agrimensura ou topografia. É também importante se observar que, por c. 1600 dC, a Trigonometria estava num estágio bastante desenvolvido, em muito ultrapassando o que é hoje ensinado no segundo grau.

2.- Os métodos não trigonométricos em Topografia

Como a grande maioria dos livros insiste em querer colocar a origem e desenvolvimento da Trigonometria nos problemas de cálculo de distâncias entre pontos sobre a superfície da Terra, vejamos exemplos de como os agrimensores e topógrafos do passado resolviam seus problemas. Suas técnicas eram baseadas no uso da semelhança de triângulos:

EXEMPLO 1

Determinação da altura h de uma montanha usando duas sombras de uma vareta de comprimento v.



Da primeira sombra: h : v = d : s1.

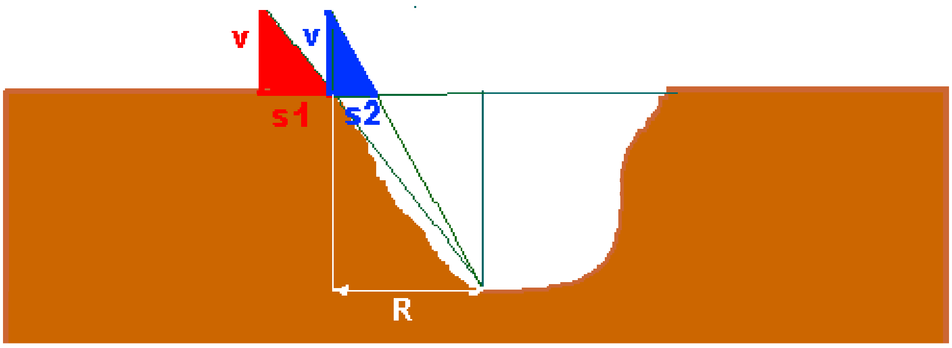
Da segunda: h : v = (d + e + s2) : s2.

Daí se obtém:

$$d = s1\ (e + s2) / (s2 - s1)$$

EXEMPLO 2

Cálculo da profundidade p de um buraco (poço, ravina, etc) usando uma vareta de comprimento v.



da primeira posição da vareta obtemos: p : R = v : s1

e da segunda posição (beirada do buraco) : p : (R - s2) = v : s2, de modo que, após eliminar o R, conseguimos:

$$p = v\, s2 / (s2 - s1)$$

3.- O Início das aplicações da Trigonometria na Geodésia : W. Snell c. 1 600

A fim de obter coordenadas dos pontos de uma região na superfície da Terra, Snell, que é mais conhecido pela lei da refração, introduziu a idéia de triangulação. Essa consiste no seguinte:

- cobrimos a região com uma cadeia de triângulos de vértices A, B, C, etc escolhidos de modo que cada um, C por exemplo, seja visível desde os dois precedentes (A e B no exemplo) e dos dois seguintes (D e E no exemplo). Tipicamente esses vértices são escolhidos em topos de montanhas, torres de igrejas e outros pontos de fácil visualização.
- medimos com exatidão o comprimento do lado AB, que é chamado base e que preferivelmente deve estar sobre um terreno plano para facilitar as medidas medimos todos os ângulos dos triângulos da cadeia
- a partir da lei dos senos e da base e ângulos medidos, calculamos o comprimento de todos os lados dos triângulos da cadeia
- usando-se Astronomia, calculamos as coordenadas (latitude e longitude) de um dos vértices e medimos o ângulo (chamado **Azimute**) que um dos lados faz com a direção norte. Com todas essas informações, calculamos as coordenadas dos demais vértices.

Se a região tiver um diâmetro de até cerca de 20 Km, podemos considerar os triângulos da cadeia como planos, e dizemos que temos uma triangulação topográfica. Para regiões maiores precisamos levar em conta a esfericidade da Terra, tratando os triângulos da cadeia como triângulos esféricos e dizemos que temos uma triangulação geodésica. Esses dois tipos de triangulações são os usados, respectivamente, pela Topografia e Geodésia.

Foi só a partir de cerca de 1 750 que começou a se tornar coisa comum se usar triangulações geodésicas para a feitura de mapas de municípios, estados a até continentes, e a se usar as triangulações topográficas para o mapeamento de áreas menores (diâmetro menor do que 20 Km). Até então ou só das triangulações se restringia a trabalhos de natureza mais científica do que técnica. Com efeito, os primeiros usos das triangulações ocorreu na determinação do comprimento de um arco de meridiano para assim obter o tamanho da Terra.

A primeira dessas medidas de meridiano foi feita pelo próprio Snell, o qual usou uma pequena modificação da versão clássica de triangulação, descrita acima. Expliquemô-la com o exemplo da figura ao lado, que usa uma cadeia de

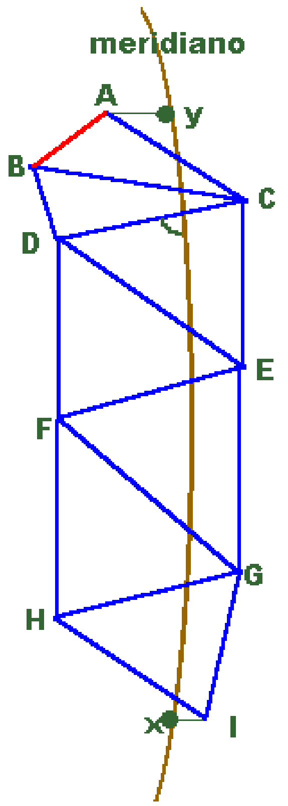
<u>7 triângulos</u> :

A base é AB e CD é o lado do qual medimos o azimute.

Após calcular os lados dos triângulos da cadeia, um novo uso de Trigonometria Esférica nos dá o comprimento das projeções desses lados sobre o meridiano e isso nos permite obter o comprimento do arco xy em Km.

Tendo determinado a latitude dos vértices extremos, A e I, temos a amplitude de xy em graus. Daí, um cálculo simples nos dá quantos Km mede um arco de um grau na superfície terrestre e então a circunferência da Terra.

Snell usou uma cadeia de 33 triângulos e acabou fazendo um erro de 3.4%, para menos. Em 1 669, Picard usou uma cadeia de 13 triângulos para refazer a medida do meridiano. Obteve para diâmetro da Terra 12 554 Km, o que dá erro de 1.6%.



4.- A modernização da Geodésia por Gauss, c. 1 820

O século dos 1 700 foi o século do grande desenvolvimento da Trigonometria em ordem a viabilizar e facilitar os cálculos de triangulações topográficas e geodésicas. Contudo, as técnicas aí desenvolvidas não tinham condições de atenuar o efeito dos inevitáveis erros de medida, o que acabava comprometendo a qualidade dos mapas de maior tamanho.

A introdução do tratamento dos erros de observação na Geodésia e na Topografia, aumentando em muito a exatidão do trabalho dessas disciplinas, só ocorreu com o famoso matemático Gauss c. 1 820.

A maioria das pessoas o conhecem como matemático puro e desconhecem que ganhava seu sustento como matemático aplicado.

No início do século passado, durante as guerras napoleônicas, Gauss foi ordenado por Napoleão a fazer um mapa de grande precisão da região de Hannover, Alemanha. Para levar a cabo sua missão, Gauss acabou desenvolvendo uma série de resultados matemáticos (teoremas sobre a distribuição normal ou gaussiana, o método da regressão linear, etc) para poder controlar o efeito dos erros de observação nos levantamentos geodésicos, bem como renovou (com cuidados relevantes às necessidades de alta exatidão em Geodésia) as técnicas de resolução dos triângulos e os métodos geodésicos tradicionais. Por exemplo, boa parte da determinação das coordenadas geográficas de marcos do interior do Brasil, pelo Serviço Geográfico do Exército, foram feitas usando o Método de Cálculo da Latitude de Gauss.

Quando falamos em TRIGONOMETRIA não podemos de deixar de mencionar a nossa QUERIDA GEOMETRIA pois uma não seria nada sem a outra:

Geometria

Geometria significa "medida da terra". Mas o que se tem de mais interessante ao se estudar a história, é que os primeiros passos no estudo da geometria foram dados com base numa hipótese falsa. Acreditava-se que a Terra era plana, portanto, todas as pesquisas foram feitas segundo essa crença, mas isso não impediu o desenvolvimento da geometria.

Foi no período grego, entre 600 e 300 a.C., que a geometria se firmou como um sistema organizado, e muito disso se deve a Euclides, mestre na escola de Alexandria (Cidade do Egito, famosa por seu farol), que publicou por volta de 325 a.C. Os Elementos, uma obra com treze volumes, propondo um sistema inédito no estudo da Geometria.

Esse trabalho de Euclides é tão vasto que alguns historiadores não acreditaram que fosse obra de um só homem.

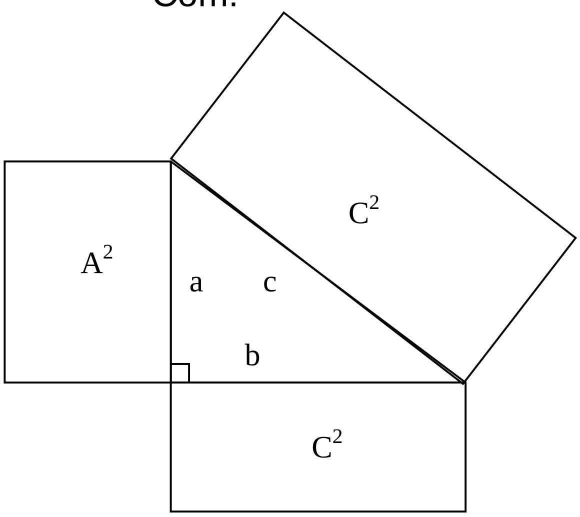
Mas essas desconfianças não foram suficientes para tirar o mérito de Euclides o primeiro a propor um método para um estudo lógico da matemática.

A aula a seguir foi retirada de um livro didático, conforme bibliografia:

Desenvolvimento: Solicite aos alunos que desenhem um triângulo retângulo qualquer e que denominem as medidas dos catetos de a e b da hipotenusa de c . peça também que construam os quadrados sobre os lados desse triângulo, bem como escrevam as expressões de suas áreas no interior de cada quadrado.

Poderão obter uma figura "bastante parecida"

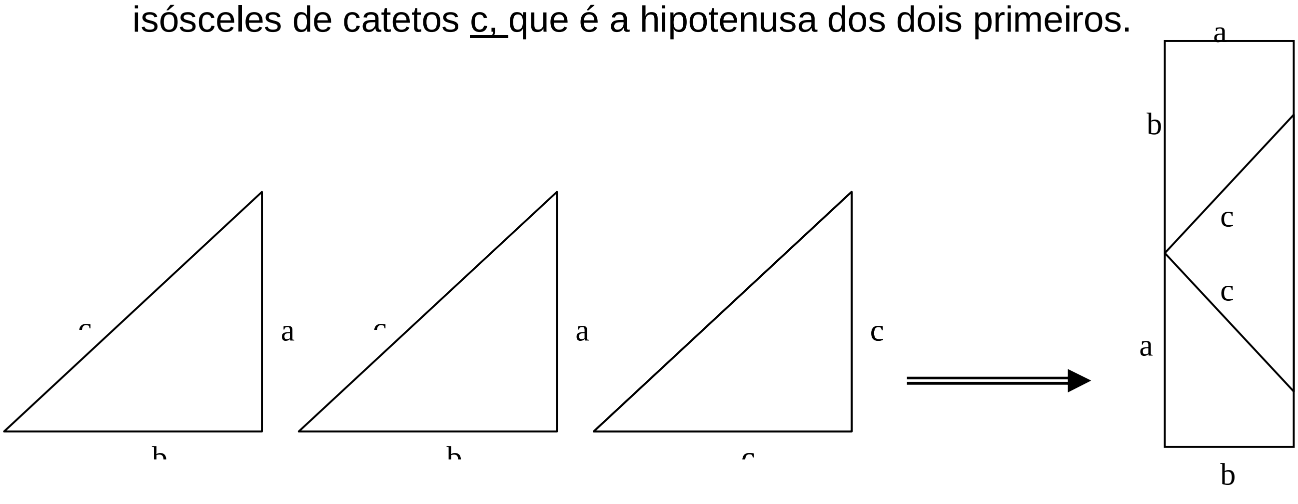
Com:



Levando em conta as conclusões da atividade6 (Relações Pitagórica: uma verificação experimental), que relação poderão escrever entre as áreas dos quadrados?

Explique a eles que expressões $a^2 + b^2 = c^2$ é bastante utilizada para abreviar a propriedade das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulos retângulos.

Ao longo do tempo, muitos homens se interessaram em fazer uma demonstração dessa propriedade e entre eles, um general americano, James Abram Garfield, que foi por um curto período de tempo presidente dos Estado Unidos. Ele se i interessou pelo assunto e apresentou uma prova baseada numa figura com três triângulos retângulos, que fornam um trapézio. Dois desses triângulos são iguais aquele de lados a, b e c acima, e o terceiro é um triângulo retângulo isósceles de catetos c, que é a hipotenusa dos dois primeiros.

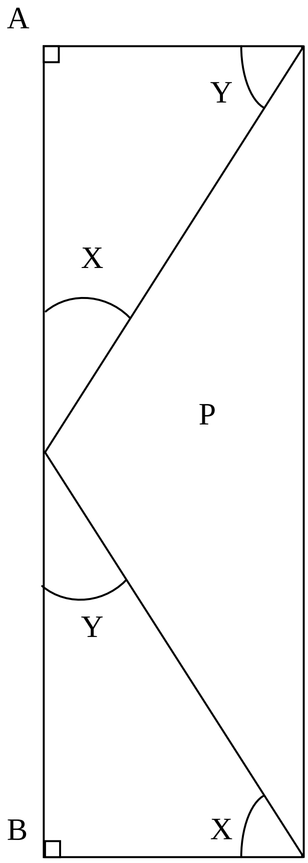


Questione também se os três triângulos dispostos como na figura anterior formam mesmo um trapézio.

Peça aos alunos que calculem as áreas do trapézio e dos triângulos que o compõem, para demonstrarem que $a^2 + b^2 = c^2$.

Comentários:

Num primeiro momento, as figuras envolvidas nessa demonstração podem ser recortadas em papel como peças de um quebra-cabeças. É importante conectar que não é pelo fato de que as peças recortadas aparentemente formam um trapézio, que devemos acreditar nisso. O questionamento principal deve ser feito em torno dos três ângulos ao redor do ponto P (FIGURA SEGUINTE).



Como x e y são ângulos complementares por serem ângulos agudos do triângulos retângulos dado, então somam 90^o

Com mais 90^o do ângulo reto do triângulo isósceles retângulo, temos 180^o E, portanto, os pontos a, p e b estão alinhados.

Conclusão Aula Apresentada pelo Autor x Apresentada .

A aula apresentada pelo livro didático é muito “ FRIA “ ou seja começa de um ponto no vazio e vago, o que nos alunos reflete com falta de incentivo e interesse , tornando a aula dispersa e pouco proveitosa.
O autor pede para que se construa triângulos como trabalhos manuais, que pode trazer algum interesse junto aos alunos.
Se esta aula apresentada estivesse em seu corpo inicial a apresentação da história da trigonometria fazendo um elo com o ponto de vista do ensino escolar atual , acredito que o rendimento da mesma seria maior e a receptividade seria.
Já a aula apresentada a seguir traz um fator importante que foi muito bem abordada em aula que é o início com a história da trigonometria e como a aula elaborada foi utilizada com elementos da informática ou seja criei um arquivo em PowerPoint a atenção dos alunos é maior pois a informática é uma linguagem atual da faixa etária de nossos alunos.
Apresentei essa atividade para minha esposa que também leciona como professor de Matemática no Estado e a observação feita é que a dinâmica aplicada junto com a metodologia desenvolvida gera uma maior absorção do conteúdo , observando também a facilidade de administrar o conteúdo .

Bibliografia:

BIANCHINI, Edwaldo, PACCOLA, Herval. **Matemática – Vol. 1 – Versão Beta**. São Paulo: 2ª Edição. Editora Moderna, 1997.

SMOLE, Kátia, KIYUKAWA, Rokusaburo. **Matemática 1**. São Paulo: 1ª Edição. Editora Saraiva, 1998.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática – Dando Corda na Trigonometria – Volume 6**.São Paulo: 3ª Edição. Editora Ática, 1995.

Célia MC Pires, Dulce S Onaga, Maria Nunes, Ruy C Pietropaolo,Suzana Laino Cândido, Vinício de M Santos.**Experiências Matemáticas , versão preliminar**
Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas 1994
Publicação amparada pela Lei 5988 de 14 Dez de 1973.